**GENERALIZAREA FUNCŢIEI DE PRODUCŢIE DE**

**TIP COBB-DOUGLAS**

**Anamaria-Geanina MACOVEI**

“Ştefan cel Mare” University of Suceava, Romania

anamaria.macovei@usm.ro

**Abstract:**

Scopul acestei lucrări este de a generaliza funţia producţiei de tip Cobb-Douglas, realizând astfel interdependenţa dintre resursele folosite şi factorii de fabricaţie în procesul de producţie. Pentru a ajunge la scopului propus considerăm variabilele independente ca fiind variabilele de intrare şi variabila dependentă este variabila de ieşire. Variabilele de intrare sunt resursele folosite şi factorii de producţie, iar variabila de ieşire este funcţia de producţie. Rezultatele obţinute constau în generaliazarea funţia producţiei de tip Cobb-Douglas, determinarea elasticităţilor variabilei dependente în raport cu fiecare variabilă independentă şi productivităţilor marginale, parcurgerea etapelor metodei celor mai mici patrate şi obţinerea coeficienţilor funcţiei de producţie de tip Cobb-Douglas. Aceste rezultatele sunt esenţiale în analize ample econometrice şi sunt utile cercetătorilor care doresc în analiza econometrică să folosească mai mulţi factori de influenţă (intrări).

**Key words**: funcţiei de producţie de tip Cobb-Douglas, factorii de producţie, elasticitate, productivitate marginală

**JEL classification**: E25, O40

1. **INTRODUCERE**

Fenomenele economice sunt foarte complexe şi conţin factorii de creştere economică. Prima data P.H. Douglas ţine un discurs despre existenţe teoriei producţiei. “It summarised approximately 30 econometric studies that inductively inves-tigated marginal productivity theory. It was this body of work that yielded the Cobb-Douglas production function that is used extensively in theoretical and applied research. Douglas undertook this research because he had reached the conclusion that economic theorists had become lazy in how they illustrated marginal productivity curves”(Fraser, 2002). Studiile Cobb şi Douglas deşi au fost contestate, au condus către formularea teoriei productivităţii marginale.

Cu ajutorul funcţiei de producţie de tip Cobb-Douglas putem analiza influenţa resursele folosite şi factorii de producţie asupra nivelului de producţie realizabil.

Funcţia producţiei de tip Cobb-Douglas este o funcţie folosită în micro-macroeconomie şi reprezintă interdependenţa dintre resursele folosite în procesul de producţie şi nivelul de producţie ce poate fi îndeplinit cu ajutorul tehnologiilor folosite. Aceasta exprimă conexiunile dintre intrările şi ieşirile în structurile de producţie, indicând valoarea maximă a producţiei. Teoria ofertei are la bază funcţia producţiei. În procesul decizional deciziile de producţie au un rol esenţial prin gestionarea intrărilor (resursele folosite şi factorii de producţie) şi ieşirilor (funcţia de producţie). “Decizia presupune combinarea, respectiv substituția factorilor de producție și implică modificarea cantității de factori utilizați, modificarea proporției dintre factori sau înlocuirea unui factor cu altul. Substituția factorilor de producție a constituit și constituie un domeniu de cercetare în știința economică, având în vedere tendința de dematerializare a producției prin dezvoltarea tehnologiei informației și comunicațiilor, TIC, și creșterea importanței serviciilor în societatea bazată pe cunoaștere” (Iacob and Dumitru, 2020). Din acest motiv în această lucrare ne propunem să generalizăm funcţiei producţiei de tip Cobb-Douglas prin considerarea implicării în procesul de producţie a mai multor resurse folosite şi factori de producţie (mai multe intrări). Funcția de producţie de tip Cobb-Douglas “fără restricții își mărește și mai mult potențialitatea de a gestiona diferite scale de producție” (Bhanumurthy, 2002).

Managerul are un rol esenţial în actul de decizional, fiind preocupaţi de eficientizarea resursele folosite şi factorilor de producţie. În acest context scopul cercetării de a generaliza funţia producţiei de tip Cobb-Douglas, realizând astfel interdependenţa dintre resursele folosite şi factorii de fabricaţie în procesul de producţie. Pentru a atinge scopus propus sunt stabilite următoarele obiective: 1. Generalizarea funţiei producţiei de tip Cobb-Douglas şi 2. Determinarea coeficienţilor de regresie pentru funţiei producţiei de tip Cobb-Douglas. Rezultatele obţinute sunt esenţiale în analize ample econometrice şi sunt utile cercetătorilor care doresc în analiza econometrică să folosească mai mulţi factori de influenţă (intrări). În articol factorii de influenţă sunt resurselor folosite şi factorilor de producţie, dar pot fi incluşi factori sociali sau de timp, deoarece “globalizarea, crearea pieței unice a bunurilor și serviciilor la nivelul Uniunii Europene și fluidizarea fluxurilor de capital au determinat mutații esențiale în cadrul politicii fiscale” (Tulvinschi and Macovei).

1. **LITERATURA DE SPECIALITATE**

Funcția producției (Cobb-Douglas) este cercetată și aplicată de specialiștii din domeniu pentru a studia creșterea economică, un factor de sustenabilitate a economiei. În literatura de specialitate întâlnim numeroase lucrări care au ca subiecte de studiu funcţia producţie de tip Cobb-Douglas şi modelarea economică realizată folosind această funcţie. Datorită fenomenelor economice din ce în ce mai complexe numeroşi specialişti de seamă din domeniu folosesc funcţia de producţie de tip Cobb-Douglas în analize econometrice privind evoluţia acestora.

Funcția de producție de tip Cobb-Douglas utilizată și estimată de Cobb și Douglas în lucrarea din 1928 și celelalte lucrări ulterioare, precum şi de mulţi cercetători din domeniu are forma:

**

unde Q reprezintă producţia , L reprezintă munca și K reprezintă capitalul , iar A,  și  sunt constante. Autorii presupun că  şi sunt îndeplinite condiţiile de coliniaritate.

În lucrarea (Chen and Han, 2014) autorii determină un nou model studiu al funcţiei de producţie de tip Cobb-Douglas de calcul al ratei de contribuţie a diferiţilor factori de influenţă la creşterea economică din China şi propun un nou algoritm care se caracterizează printr-o ”precizie ridicată şi convergentă rapidă”. Indicatorii eficienței potențialului economic au fost studiați funcţiei de producţie de tip Cobb-Douglas (Anghel and all, 2019). Indicatorii capitalul investit şi forţa de muncă influenţează producţie (Macovei and Siretean, 2017). Funcția de producție de tip Cobb-Douglas este utilizată în influenţa performanţei ofertei asupra măsurării potenţialului productiv la nivel microeconomic. Datorită creşterii forţei de muncă din în lucrarea (Hájková and Hurník, 2007) autorii testează dacă se poate aplica funcţia de producție pentru economia Cehă. Indicatorilor de apreciere a eficienței și a productivității sunt modelaţi cu funcţiei de producţie de tip Cobb-Douglas (Stan, 2005).

Autorii lucrării (Zellner and all, 1966) revizuiresc ipotezele „tradiționale” specifice modelul funcţiei de producţie de tip Cobb-Douglas care maximizează profitul şi dezvoltă „un model în care profiturile sunt stochastice și în care se prezintă maximizarea așteptării matematice a profiturilor”.

În lucrarea (Macovei and Balan, 2009) indicatorii numărul angajaţilor din turism, numărul unităţilor de cazare şi numărul turiştilor cazaţi influenţează conform funcţiei de producţie de tip Cobb-Douglas cifra de afaceri. Autorul lucrării (Bhanumurthy, 2002) susține că funcția de producție Cobb-Douglas „merită folosită pentru analiza procesului de producție, nu pentru că ar trebui privită ca un instrument simplu care poate fi manipulat cu ușurință sau ca un remediu brut pentru estimare, ci din cauza avantajelor pe care le oferă posedă. Aceste avantaje se datorează faptului că poate gestiona mai multe intrări în forma sa generalizată. Chiar și în fața imperfecțiunilor de pe piață, nu introduce distorsiuni proprii.”

Elasticitatea variabilă a funcțiilor de producție de tip Cobb-Douglas sunt tratate şi calculate în lucrările (Lu, 1967) şi (Gechert and all, 2019).

1. **DEFINIREA FUNCÏEI DE PRODUCŢIE**

Considerăm generalizarea funcţiei de producţie de tip Cobb-Douglas de forma:

**, cu . (1)

unde

*- Y* reprezintă nivelul de producţie şi este o variabilă dependentă de forma , ;

*-* , reprezintă resursele folosite şi factorii de producţie în procesul de producţie şi sunt variabilele independente de forma ;;

-  reprezintă coeficientul de regresie care arată valoarea medie a variabilei dependente Y când , ;

- ,  reprezintă coeficienţii de regresie, care sunt elasticităţile variabilei dependente în raport cu fiecare variabilă independentă, unde

, .

S-a demonstrat de-a lungul timpului că procesele de producție urmează o “funcție liniară omogenă cu o elasticitate de substituție a unuia dintre factori” (Douglas, 1976). Coeficienţii de regresie trebuie să îndeplinească proprietăţile de coliniaritate.

Folosind funcţia de producţie managerii urmăresc în procesul de producţie maximizarea producţiei folosind resursele şi tehnologiile utilizare. Productivitatea marginală este dată de formula:

,

şi reprezintă producţia suplimentară obţinută datorită utilizării suplimentare a unei unităţi din resursa folosită în condiţiile în care celelalte resurse din procesul de producţie rămân constante. Productivitaea marginală are evoluţie de creştere precum şi de descreştere. Evoluţia curbei productivităţii marginale are la bază legea randamentului şi anume există un punct în care productivitatea marginală scade când o resursă creşte, iar celelalte resurse rămân constante.

1. **DETERMINAREA COEFICIENŢILOR FUNCŢIEI PRODUCŢIEI**

În estimarea coeficienţilor funcției de producție de tip Cobb-Douglas, estimatorul care trebuie utilizat depinde de specificația comportamentului termenului de perturbare în funcția de producție. Dacă termenul de perturbare nu este transmis intrărilor, adică dacă intrările sunt independente de această perturbare, atunci estimatorul de cel mai mic pătrat este consecvent, iar dacă perturbarea este transmisă complet către intrări, atunci se obține un estimator consecvent dacă sunt impuse unele restricții asupra celui de-al doilea moment al perturbărilor din sistem. Cu toate acestea, se poate specifica un caz mai general, care să cuprindă specificațiile de mai sus ca subcazuri. În acest caz general, termenul de perturbare poate fi transmis doar parțial. Dacă se întâmplă acest lucru, atunci nici unul dintre estimatorii menționați mai sus nu este consecvent. În situații destul de generale, acești estimatori furnizează limite superioare și inferioare pentru elasticitatea funcției de producție (într-un caz cu o singură intrare) sau pentru suma elasticităților. Consecințele fiecăreia dintre aceste specificații, în ceea ce privește limitele de probabilitate, sunt examinate în detaliu. Acest lucru se realizează, mai întâi, pentru un caz de intrare, apoi se discută despre cazul de intrare..

Funcţia de producţie de tip Cobb-Douglas este o funcţie de regresie neliniară multiplă. Pentru determinarea coeficienţilor de regresie transformăm funcţia de producţie de tip Cobb-Douglas (1) într-un model log-liniar multiplu de forma:

 , cu .

În aceste condiţii avem funcţia eroare de forma:

, 

Particularizăm funcţia eroare pătratică pentru un eşantion *n*:

, 

şi avem astfel o problemă de extrem local. Pentru uşurarea calculelor notăm . Astfel avem funcţia:



Dacă derivăm funcţia  în raport cu variabilele , atunci obţinem:











Conform algoritmului de determinare a extremelor locale avem ecuaţiile, care conduc la sistemul normal al lui Gauss:



Efectuând calculele obţinem sistemul:



Aşadar, obţinem soluţia unică . Elasticităţile calculate ,  reprezintă creşterea procentuală a funcţiei de pruducţie (ieşiri) în raport cu creşterea procentuală a resurselor folosite şi factorilor de producţie (intrări).

Calculând derivatele parţiale de ordinul al doilea pentru funcţia *,* obţinem:

, , ,

, , , .

Matricea hessiană are forma:



Conform algoritmului de determinare a extremelor locale avem:











În aceste condiţii, soluţia  este punct de minim local, aşadar, minimizează abaterea pătratică.

Elasticitatea totală este dată de relaţia:



şi măsoară creşterea procentuală a nivelul de producţie când resursele folosite şi factorii de producţie cresc în aceleaşi proporţii. În aceste condiţii avem:

* Dacă , atunci variaţia producţiei este accelerată şi se întâlneşte când funcţiei de pruducţie (ieşiri) creşte în proporţie mai mare decât cresc resursele folosite şi factorii de producţie (intrări),
* Dacă , atunci variaţia producţiei este constantă şi se întâlneşte când funcţiei de pruducţie (ieşiri) creşte în aceeaşi proporţie cu creşterea resursele folosite şi factorii de producţie (intrări),
* Dacă , atunci variaţia producţiei este scăzută şi se întâlneşte când funcţiei de pruducţie (ieşiri) creşte în proporţie mai mică decât cresc resursele folosite şi factorii de producţie (intrări).

1. **CONCLUSION**

Funcţia de producţie de tip Cobb-Douglas ocupă un loc esenţial în analiza econometrică a fenomenelor economice de pe plan naţional, cât şi internaţional. Această funcţie deserveşte managerului să înţeleagă mecanismele fundamentale ale actului decizional din punct de vedere teoretic, dar şi practic. Datorită fenomenelor economice din ce în ce mai complexe numeroşi specialişti de seamă din domeniu folosesc funcţia de producţie de tip Cobb-Douglas în analize econometrice pentru a previziona evoluţia acestora.

O generalizare a funcţia de producţie de tip Cobb-Douglas, care este un model de regresie neliniar are un rol esenţial în actul de decizional. În lucrare obiectivele au fost atinse şi anume s-a generalizat o funcţio de producţie de tip Cobb-Douglas şi s-a determinat coeficienţii de regresie pentru funţia generalizată.

Rezultatele obţinute sunt esenţiale în analize econometrice din ce în ce mai complexe fiind utile cercetătorilor care doresc în analiza econometrică să folosească mai multe variabile independente, resurselor folosite şi factorilor de producţie dar pot fi incluşi factori sociali sau de timp (intrări).

**BIBLIOGRAPHY**

1. Angel, M.G., Anghelache, C., Stoica, R. (2019). The concept and indicators of the economic potetial efficiency, Supplement, no.3.
2. Bhanumurthy, K.V. (2002). Arguing a Case for Cobb-Douglas Production Function, Review of Commerce Studies, Vol. 20-21, No. 1, January-June.
3. Cheng, M.L., Han, Y. (2014) [A modified Cobb–Douglas production function model and its application](https://academic.oup.com/imaman/article-abstract/25/3/353/861988) IMA Journal of Management Mathematics.
4. Cobb, C.W., Douglas, P.H. (1928). A Theory of Production, American Economic Review, 18 (Supplement).
5. Douglas, P.H. (1976). The Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing, and Some New Empirical Values, Journal of political economy.
6. Douglas, P. H. (1948). Are There Laws of Production?, American Economic Review, 38, 1.
7. Fraser, I. (2002). The Cobb-Douglas Production Function: An Antipodean Defence?, Economic Issues, vol.7, Part1.
8. Iacob, Ş.V., Dumitru, D. (2020). Funcţia de producţie utilizată în stidiile şi analizele microeconomice, Revista Română de Statistică – Supliment nr.7 .
9. [Gechert](https://scholar.google.ro/citations?user=jDVuiCkAAAAJ&hl=ro&oi=sra), S., [Havránek](https://scholar.google.ro/citations?user=BF0BvBkAAAAJ&hl=ro&oi=sra) , T., Havránková, Z., [Kolcunova](https://scholar.google.ro/citations?user=ydXHCMAAAAAJ&hl=ro&oi=sra) D. (2019). [Death to the Cobb-Douglas production function](https://www.econstor.eu/bitstream/10419/206805/1/1677355891.pdf), econstor.eu
10. Hájková, D., Hurník, J. (2007). [Cobb-Douglas Production Function: The Case of a Converging Economy](https://ideas.repec.org/a/fau/fauart/v57y2007i9-10p465-476.html), [Czech Journal of Economics and Finance](https://ideas.repec.org/s/fau/fauart.html), Charles University Prague, Faculty of Social Sciences, vol. 57(9-10), pages 465-476, October.
11. Macovei, A. G., Siretean, S. T. (2017). Funcţia de producţie - factor important în actul decizional, Dezvoltarea turistică regională în Statele Membre ale Uniunii Europene. O abordare cantitativă, Editura Didactica si Pedagogica RA, Bucuresti.
12. Macovei, A. G., Balan, I. (2009) Econometric analysis on the influence of different factor over the share of turnover in tourism - The Annals of the „Ştefan cel Mare” University Suceava, Fascicle of the Faculty of Economics and Public Administration, Anul 9, Nr. 9(1).
13. Stan, F. (2005). Productivitatea – indicator de apreciere a eficienţei, Economistul, Supliment, Economie teoretică şi aplicată, nr.1848.
14. Tulvinschi, M., Macovei, A.G. (2020). Econometric analysis of the influence of corporate TAX and VAT rate on tax revenues of companies in EU Member States, The European Journal of Accounting, Finance & Business, Volume XIII/2020, Issue (XXIII) June.
15. Zellner, A.,  Kmenta, J., Dreze, J. (1966).   [Specification and estimation of Cobb-Douglas production function models](https://www.jstor.org/stable/1910099), Econometrica, vol 34, No. 4.
16. \*\*\*\* Funcţia de producţie şi utilizarea eficientă a resurselor, 2017, <https://conspecte.com/microeconomie/functia-de-productie-si-utilizarea-eficienta-a-surselor.html> (accesat la 7.08.2021)